Perbandingan Quaternion dan Matriks untuk Masalah Rotasi

Muhammad Alfansya - 13523005[,2]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13523005@std.stei.itb.ac.id, [2]muhammadalfansya@gmail.com

***Abstract*—Makalah ini membahas perbandingan antara penggunaan pendekatan quaternion dengan pendekatan matriks dalam pengaplikasian nya untuk rotasi suatu objek**

***Keywords*— Matriks, Quatrenion, Rotasi, Vektor**

I. Pendahuluan

Rotasi adalah salah satu bentuk transformasi geometri yang memiliki banyak penerapan di era digital saat ini. Contohnya dapat dilihat dalam pergerakan kamera dan karakter dalam video game, animasi karakter, serta model simulasi seperti simulasi sains. Rotasi berfungsi untuk mengubah posisi sebuah titik atau objek dengan cara memutar objek tersebut terhadap sumbu dan titik pusat tertentu sesuai dengan sudut yang diinginkan.

Pada ruang tiga dimensi, rotasi dapat direpresentasikan menggunakan dua pendekatan, yaitu matriks dan quaternion. Dalam makalah ini, penulis akan membahas perbedaan antara representasi rotasi menggunakan matriks dan quaternion.

.

II. Landasan Teori

A. Matriks

Matriks adalah susunan dari bilangan real atau bilangan kompleks yang tersusun dalam baris dan kolom yang membentuk persegi panjang.

Matriks direpresentasikan dengan $[M]_{mxn}$ dengan m adalah jumlah baris pada matriks dan n adalah jumlah kolom dari matriks. Bilangan-bilangan atau symbol yang terdapat pada matriks disebutdengan elemen matriks. Apabila jumlah kolom m sama dengan jumlah baris n maka matriks tersebut dinamakan matriks persegi (square matrix).

B. Rotasi dengan Matriks

Matriks rotasi terhadap sumbu x

$$\begin{bmatrix} X'_p \\ Y'_p \\ Z'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\omega & sin\omega \\ 0 & -sin\omega & cos\omega \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}$$

Matriks rotasi terhadap sumbu y

$$\begin{bmatrix} X''_p \\ Y''_p \\ Z''_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\Phi & 0 & -sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\Phi & 0 & cos\Phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\omega & sin\omega \\ 0 & -sin\omega & cos\omega \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}$$

Matriks rotasi terhadap sumbu z

$$\begin{bmatrix} X'''_p \\ Y'''_p \\ Z'''_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\kappa & sin\kappa & 0 \\ -sin\kappa & cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\Phi & 0 & -sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\Phi & 0 & cos\Phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\omega & sin\omega \\ 0 & -sin\omega & cos\omega \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}$$

C. Quaternion

Quaternion didefinisikan oleh Hamilton merupakan perluasan dari bilangan kompleks. Quaternion terdiri dari tiga bagian imajiner yang saling berkombinasi linear. Hamilton mencoba memperluas bilangan kompleks di R^2 ke R^3. Dalam hal ini z = a + ib + jc yang merupakan triplets dengan i = j = √-1.

Namun jika dua buah triplets dikalikan akan menghasilkan masalah perkalian dua buah imajiner

$$z_1z_2 = (a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2)$$
$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ja_1c_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 + ijb_1c_2 + jc_1a_2 + jic_1b_2 + j^2c_1c_2.$$

subtitusikan $i^2 = j^2 = k^2 = 1$,

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) + j(a_1c_2 + c_1a_2) + ijb_1c_2 + jic_1b_2$$

Terdapat ij dan ji yang tidak terdefinisi. Akhirnya, Hamilton menemukan solusinya dengan cara mengubah bentuk bilangan kompleks yang terdiri dari tiga bilangan menjadi empat bilangan;

z = a + ib + jc + kd

D. Rotasi dengan Quaternion

Quaternion dapat digunakan dalam menghitung rotasi vektor dengan operasi

$$p' = qpq^{-1}$$

dimana p adalah vektor awal sebelum rotasi, p' adalah vektor hasil rotasi, q dan q-1 adalah

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u$$
$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)u$$

dimana u adalah poros rotasi berupa $u = xi + yj + zk$

Misalkan sebuah titik P(0, 1, 1), atau sebagai vektor p = (0, 1, 1), diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 90°$ dengan sumbu rotasinya adalah u = j.

$p = 0 + 0i + j + k$
$q = \cos 45^o + \sin 45(0i + j + 0k)$
$q = (1 + 0i + j + 0k)$
$q^{-1} = \cos 45^o - \sin 45^o(0i + j + 0k)$
$q^{-1} = (1 - 0i - j - 0k)$

Hasil rotasi adalah $p' = qpq^{-1}$

$p' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 + 0i + j + 0k)(0 + 0i + j + k)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - 0i - j - 0k)$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i + j + k)\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$
$= ½\,(0 + 2i + 2j + 0k)$
$= 0 + i + j + 0k$

Sehinga didapatkan hasil rotasi

$p' = (1, 1, 0) = i + j$

III. PEMBAHASAN

IV. KESIMPULAN

V

REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi. 2023. “Aljabar Quaternion (Bagian 1)”. https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-25-Aljabar-Quaternion-Bagian1-2023.pdf (Diakses pada 30 Desember 2024).

[2] Munir, Rinaldi. 2023. “Aljabar Quaternion (Bagian 2)”. https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2023-2024/Algeo-26-Aljabar-Quaternion-Bagian2-2023.pdf (Diakses pada 30 Desember 2024).

[3] Haryani, Tri. 2013. “Rotasi vektor di r3 dengan menggunakan matriks rotasi dan quaternion = Vector rotation on r3 using rotation matrix and quaternion”. https://lontar.ui.ac.id/detail.jsp?id=20350346#digital#digital (Diakses pada 30 Desember 202

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 27 Desember 2024

Muhammad Alfansya
13523005